Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 9 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(1+1+1+2 Punkte)* Betrachte die komplexe Zahl

$$z = \frac{1}{1 + i\sqrt{3}}.$$

(a) Schreibe z in Form von kartesischen Koordinaten.

(b) Schreibe z in Polarkoordinatenform.

(c) Berechne $|z|^{27}$.

(d) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $z^n \in \mathbb{R}$?

Lösung. (a): Es gilt

$$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

(b): Es gilt

$$|z| = \frac{1}{4}\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}, \qquad \arccos(1/2) = \pi/3.$$

Da das Vorzeichen des Imaginärteils von z negativ ist, folgt

$$z = \frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

(c): Es gilt

$$|z|^{27} = \frac{1}{2^{27}}.$$

(d): Es gilt

$$z^n = \frac{1}{2^n}e^{-\frac{in\pi}{3}}$$

und diese Zahl ist genau dann reell, falls $e^{-\frac{in\pi}{3}}$ reell ist. Da eine komplexe Zahl $e^{i\varphi}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ genau dann reell ist, falls φ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, erhalten wir die Bedingung

$$\frac{n}{3} \in \mathbb{N},$$

d.h. 3 muss ein Teiler von n sein. ■

Aufgabe 2: *(2+1+1+1 Punkte)* Betrachte die komplexe Zahl $w := 2i \in \mathbb{C}$.

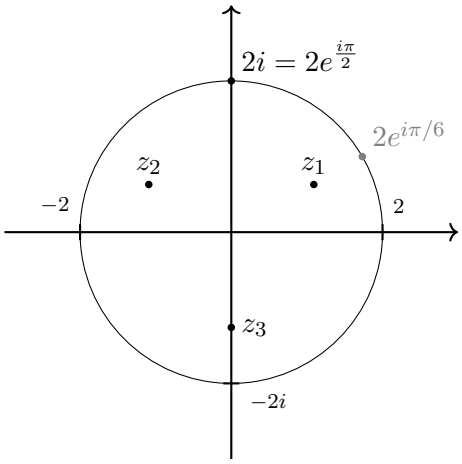
(a) Bestimme *alle* dritten Wurzeln von w, d.h. bestimme *alle* komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, deren dritte Potenz z^3 den Wert w ergibt, so dass $z^3 = w = 2i$.

(b) Skizziere $2i$ sowie alle dritten Wurzeln von $2i$ in der komplexen Zahlenebene.

(c) Führe die gleichen Schritte (a)-(b) für die konjugiert komplexe Zahl $\overline{w}$ (statt für w) aus.

(d) Führe die gleichen Schritte (a)-(b) für die inverse komplexe Zahl $w^{-1} = 1/w$ von w aus.

Lösung. In Polarkoordinaten ist $2i = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$, also sind die dritten Wurzeln gegeben durch $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \cdot z_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{5i\pi}{6}}$ und $z_3 = e^{\frac{-2i\pi}{3}} \cdot z_1 = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -\sqrt[3]{2}i$.



Es gilt weiterhin $\overline{w} = -2i = 2e^{-\frac{i\pi}{2}}$ und damit können wir das obige Bild im Prinzip "umdrehen": Die dritten Wurzeln sind gegeben durch $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ und $z_3 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}} = \sqrt[3]{2}i$.

Außerdem gilt für $w^{-1} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$ und haben die drei Wurzeln für diesen Fall dieselben Argumente mit dem Radius $1/\sqrt[3]{2}$. ■